INGTUTOR

Formelsammlung

TECHNISCHE MECHANIK 2

2. Auflage
02/2026

MIT ALLEN TABELLEN

INGTUTOR.DE

Inhaltsverzeichnis

1 Zug und Druck in Stäben 2
1.1 Spannung im Querschnitt eines Stabs 2
1.2 Hookesches Gesetz (Elastizitätsgesetz) 2
1.3 Dehnung eines Stabes 2

2 Ebener Spannungszustand 3
2.1 Koordinatentransformation, Transformationsgleichungen 3
2.2 Hauptspannungen und Hauptrichtungen 3
2.3 Hauptschubspannungen 4
2.4 Mohrscher Spannungskreis 4
2.5 Kesselformeln (dünnwandiger Kessel) 5

3 Ebene Verzerrungen 6
3.1 Querkontraktion (Querdehnung) 6
3.2 Hookesches Gesetz für ebene Elemente 6

4 Flächenträgheitsmomente 7
4.1 Flächenträgheitsmomente bei zusammengesetzten Flächen 7
4.2 Satz von Steiner (Parallelverschiebung der Achsen) 8
4.3 Koordinatentransformation (Drehung der Achsen) 8
4.4 Hauptträgheitsmomente und Hauptachsen 9
4.5 Flächenträgheitsmomente ausgewählter Querschnitte 10
4.6 Widerstandsmomente 13

5 Balkenbiegung (gerade Biegung) 14
6.1 Biegelinien-Differentialgleichung 14
6.2 Rand- und Übergangsbedingungen 14
6.3 Biegelinientafel für statisch bestimmte Systeme 15
6.4 Biegelinientafel für statisch überbestimmte Systeme 18
6.5 Überlagerung, Superpositionsprinzip 20
6.6 Biegenormalspannung 21

6 Schiefe Biegung 22
8.1 Biegelinien-Differentialgleichung bei schiefer Biegung 22
8.2 Biegenormalspannung und Spannungsnulllinie 23

7 Schubspannung infolge Querkraft (Querkraftschub) 24
9.1 Schubspannung 24
9.2 Statisches Moment 25

8 Torsion 28
10.1 Verdrehwinkel 28
10.2 Schubspannung infolge Torsion 29
10.3 Torsionswiderstandsmomente und -flächenträgheitsmomente 30

9 Knickung 33
11.1 Knickgleichung 33
11.2 Euler-Knickfälle 33
11.3 Trägheitsradius 34
11.4 Schlankheitsgrad 34
11.5 Grenzschlankheitsgrad 34
11.6 Knickspannung 34
11.7 Knicksicherheit 35
11.8 Knicken im plastischen Bereich (Tetmajer) 35

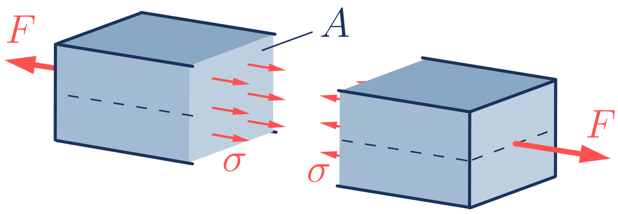
10 Wichtige Werkstoffkennwerte 37
11 Mathematische Grundlagen 38

Zug und Druck in Stäben

Spannung im Querschnitt eines Stabs

Äußere Lasten in Längsrichtung des Balkens führen zu Zug-/Druckspannungen.

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

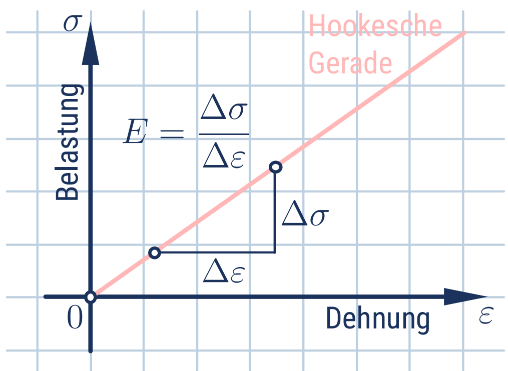


N ist hierbei die Normalkraft aus den Schnittgrößen und ist mit richtigem VZ zu berücksichtigen. Positive N führen zu Zug-, negative zu Druckspannungen.

Hookesches Gesetz (Elastizitätsgesetz)

Das Hookesche Gesetz beschreibt das linear-elastische Verhalten eines Materials und stellt den Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung her.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$



Dehnung eines Stabes

Allgemeine Definition der Dehnung:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

Mechanische Dehnung:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad \Delta l = \frac{Nl}{EA}$$

Thermische Dehnung:

$\varepsilon_T = \alpha_T \cdot \Delta T$

Bei gleichzeitiger thermischer und mechanischer Beanspruchung addieren sich die Dehnungen (nicht die Längenänderungen):

$$\varepsilon_{ges} = \varepsilon_{mech} + \varepsilon_T = \frac{\sigma}{E} + \alpha_T \cdot \Delta T$$

Hinweis zu N bei Spannung im Querschnitt eines Stabes beachten.

Allgemeines Vorgehen bei Aufgaben:

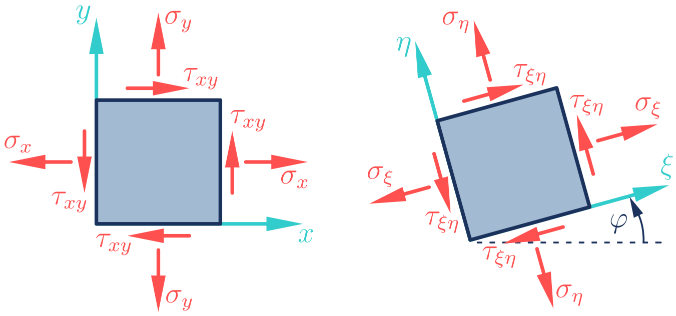
1) Freischnitt und Gleichgewichtsbedingung(en) für das System aufstellen
2) Verträglichkeitsbedingung bzw. kinematische Beziehung ermitteln
3) Hookesches Gesetz für jeden Stab (für σ und ε die obigen Formeln einsetzen)
4) Die Gleichungen aus den Schritten 1-3 ineinander einsetzen und auflösen

Ebener Spannungszustand

Vorzeichenkonvention

Am positiven Schnittufer zeigen positive Spannungen in die positive Richtung der Koordinatenachsen. Nach demselben Prinzip werden Normal- und Querkräfte bei den Schnittgrößen angetragen. An den Ecken zeigen benachbarte Schubspannungen entweder beide aufeinander zu oder beide voneinander weg.

Koordinatentransformation, Transformationsgleichungen



$$\sigma_\xi = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi$$

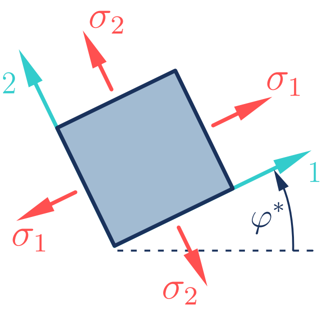
$$\sigma_\eta = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\varphi - \tau_{xy}\sin 2\varphi$$

$$\tau_{\xi\eta} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi$$

Hauptspannungen und Hauptrichtungen

Die größten und kleinsten Normalspannungen in einem beliebigen Element werden Hauptspannungen genannt.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



<u>Hinweis</u>: σ_1 (positives VZ vor der Wurzel) ist die größte, σ_2 (negatives VZ) ist die kleinste Spannung.

Hauptrichtungen (HR):

Die Richtungen, bei denen die Hauptspannungen auftreten, werden Hauptrichtungen genannt. Die erste HR gehört stets zu σ_1, die zweite HR zu σ_2.

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

<u>Achtung</u>: Diese Gleichung liefert <u>nicht zwingend</u> die erste HR. Sie kann auch die zweite HR angeben. Die andere HR erhält man, indem $90°$ bzw. $\pi/2$ dazuaddiert werden, weil beide HR senkrecht aufeinander liegen. Welche Richtung zu welcher HR gehört, muss „manuell" geprüft werden (z.B. durch Einsetzen der Richtungen in die Transformationsgleichungen).

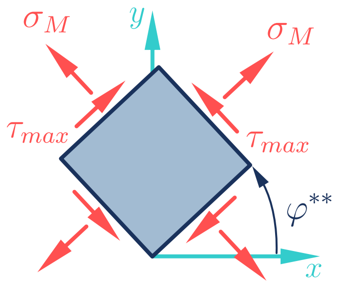
Im Hauptschnitt bzw. Hauptachsensystem verschwinden die Schubspannungen. Das sieht man, wenn man beide HR in die Transformationsgleichung einsetzt:

$$\tau_{\xi\eta}(\varphi^*) = \tau_{\xi\eta}(\varphi^* + \pi/2) = 0$$

Notizen

Hauptschubspannungen

Die maximalen Schubspannungen in einem beliebigen Element werden Hauptschubspannungen genannt.



$$\tau_{\max} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Hinweis: Die Hauptschubspannungen sind im Betrag gleich groß und unterscheiden sich nur im VZ.

Richtungen der Hauptschubspannung:

$$\tan 2\varphi^{**} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

Die andere Richtung erhält man, indem 90° bzw. $\pi/2$ dazuaddiert werden, weil beide Richtungen senkrecht aufeinander liegen. Die Richtung der Hauptschubspannung ist stets um 45° gegenüber der Hauptrichtung (Hauptnormalspannung) gedreht.

Im Schnitt der Hauptschubspannungen betragen die Normalspannungen:

$$\sigma_M = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$$

Alternative Berechnung der Hauptschubspannung bei bekannten Hauptspannungen:

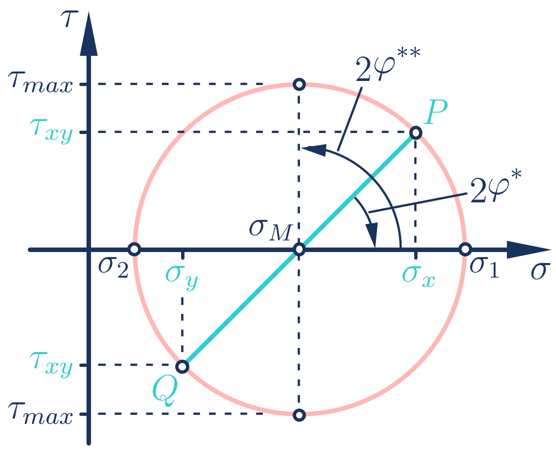
$$\tau_{\max} = \pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2), \quad \sigma_M = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2), \quad \varphi^{**} = \varphi^* + \frac{\pi}{4}$$

Mohrscher Spannungskreis

Mit dem Mohrschen Spannungskreis lassen sich an einem Punkt

- alle Spannungen bei beliebig gedrehten Schnitten
- die Hauptspannungen sowie
- die max. Schubspannungen

grafisch darstellen und ablesen.



Vorgehen:

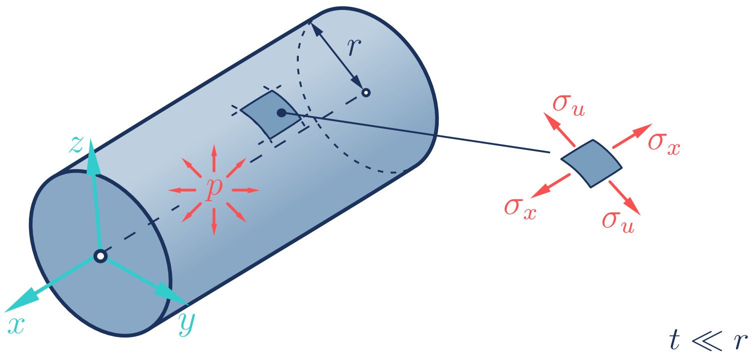
1) σ_x und τ_{xy} mit dem gegebenen bzw. korrektem VZ antragen
2) σ_y und τ_{xy} antragen, wobei das VZ für τ_{xy} umgedreht wird
3) P und Q antragen und zur Geraden $\overline{PQ}$ verbinden
4) Schnittpunkt von $\overline{PQ}$ mit der σ-Achse ist σ_M
5) Kreis um σ_M zeichnen, der durch P und Q geht

Nun können alle wesentlichen Spannungsgrößen grafisch abgelesen werden.

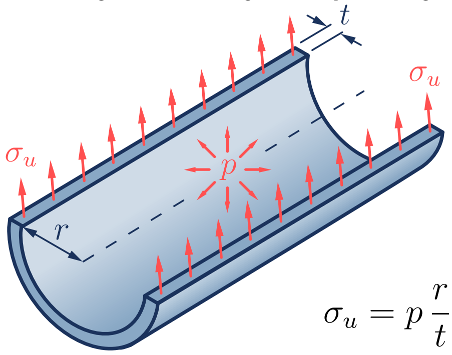
Hinweis: Positive Winkel werden im Mohrschen Kreis negativ herum mit doppeltem Betrag berücksichtigt. Erhält man z.B. einen positiven Wert (Drehung gegen den Uhrzeigersinn) für die Hauptrichtung φ^*, so wird dieser Winkel negativ (also im Uhrzeigersinn) und mit dem doppelten Betrag angetragen.

Kesselformeln (dünnwandiger Kessel)

Steht ein Kessel, dünnwandig und zylinderförmig, unter einem Innendruck, dann werden in der Wand bzw. Mantelfläche (ebene) Spannungen verursacht.

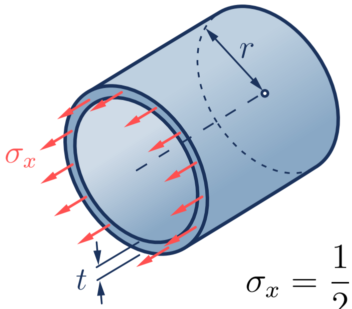


Umfangs- bzw. Tangentialspannung



$$\sigma_u = p\,\frac{r}{t}$$

Längs- bzw. Axialspannung



$$\sigma_x = \frac{1}{2}\,p\,\frac{r}{t}$$

1) Die Umfangs- ist doppelt so groß wie die Längsspannung: $\sigma_u = 2 \cdot \sigma_x$
2) Wirkt Außen- statt Innendruck, dann ist das Vorzeichen von p zu ändern.
3) σ_u und σ_x sind im gezeigten Schnitt Hauptspannungen. Hier treten demnach keine Schubspannungen auf.
4) Die max. Schubspannung tritt unter $45°$ auf und beträgt: $\tau_{max} = \frac{1}{4}\,p\,\frac{r}{t}$

Notizen

Ebene Verzerrungen

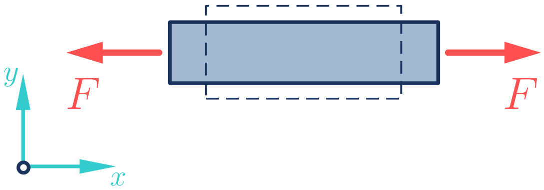
Ebene Verzerrungen (=Verformungen) behandeln die aus Normal- und Schubspannungen hervorgerufenen Dehnungen und Scherungen an ebenen Elementen.

Querkontraktion (Querdehnung)

Kräfte bzw. Spannungen in Längsrichtung verursachen sowohl Dehnungen in Längsrichtung als auch quer dazu. Bei Zug zieht sich der Querschnitt wie abgebildet zusammen (=Querkontraktion).

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot \sigma_x$$

$$\varepsilon_y = -\nu \cdot \varepsilon_x$$



Querkontraktions-/ Poisson-Zahl für Metalle: $\nu \approx 0,3$

Hookesches Gesetz für ebene Elemente

Bei gegebener Spannung:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{xy}$$

Bei gegebener Verzerrung:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)$$

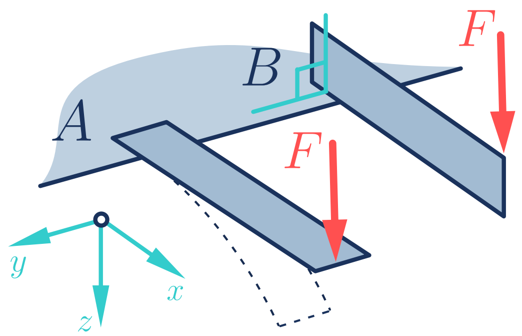
$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$$

Dabei ist G der Schubmodul.

Notizen

Flächenträgheitsmomente

Das Flächenträgheitsmoment (= FTM) ist ein Maß für den Widerstand eines Querschnitts gegenüber Biegeverformungen. Lässt sich ein Balken schwer verbiegen, dann hat sein Querschnitt ein großes FTM. Das FTM ist eine rein geometrische Größe.



Position A: Hier liegt das Lineal flach auf der Tischkante. Unter einer Last am freien Ende gibt das Lineal nach und verbiegt sich. Das FTM ist hier klein und somit gibt es kaum Widerstand gegenüber Biegung.

Position B: Das Lineal steht nun wie abgebildet senkrecht auf der Tischkante. Unter derselben Last am freien Ende gibt es keine Absenkung. Das FTM ist hier groß und derselbe Querschnitt leistet jetzt deutlich mehr Widerstand.

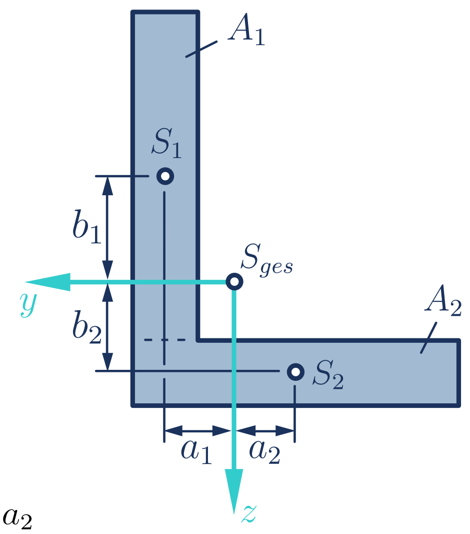
Flächenträgheitsmomente bei zusammengesetzten Flächen

Allgemeine Form:

$$I_y = \sum I_{y,i} + \sum A_i b_i^2$$

$$I_z = \sum I_{z,i} + \sum A_i a_i^2$$

$$I_{yz} = \sum I_{yz,i} - \sum A_i b_i a_i$$



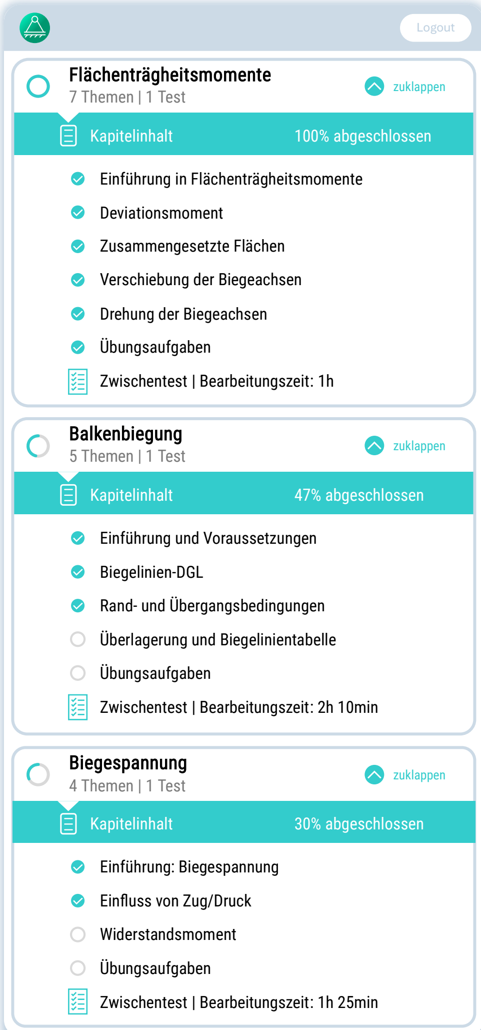
Für den abgebildeten Querschnitt:

$$I_y = I_{y1} + I_{y2} + A_1 b_1^2 + A_2 b_2^2$$

$$I_z = I_{z1} + I_{z2} + A_1 a_1^2 + A_2 a_2^2$$

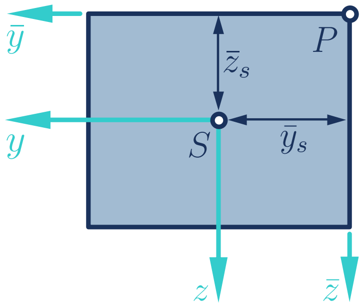
$$I_{yz} = I_{yz1} + I_{yz2} - A_1 b_1 a_1 - A_2 b_2 a_2$$

1) Der Schwerpunkt der Gesamtfläche sowie die Schwerpunkte der einzelnen Teilflächen müssen bekannt sein.
2) Die Ausdrücke $A_i b_i^2$ werden Steiner-Anteile genannt.
3) Die Steiner-Abstände a und b sind die <u>Abstände vom Gesamtschwerpunkt zum Teilflächenschwerpunkt</u>. So ist z.B. b_1 negativ, weil man von S_{ges} in die negative z-Richtung gehen muss, um zu S_1 zu gelangen.
4) Das Vorzeichen der Abstände muss nur bei I_{yz} korrekt berücksichtigt werden. Für I_y und I_z spielt das Vorzeichen keine Rolle, weil die Abstände hier quadriert werden und deswegen immer positiv sind.



Satz von Steiner (Parallelverschiebung der Achsen)

Verschiebt man die Achsen parallel bzw. verschiebt man den Koordinatenursprung von S zu P, dann erhält man die neuen FTM mit:



$$I_{\bar{y}} = I_y + \bar{z}_s^2 A$$

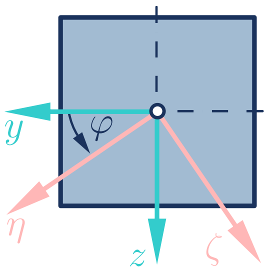
$$I_{\bar{z}} = I_z + \bar{y}_s^2 A$$

$$I_{\bar{y}\bar{z}} = I_{yz} - \bar{y}_s \bar{z}_s A$$

1) Das Vorzeichen der Steiner-Abstände $\bar{y}_s$ und $\bar{z}_s$ ist nur für $I_{\bar{y}\bar{z}}$ relevant (siehe Hinweis 4).
2) Die Abstände werden vom neuen Koordinatensystem aus gezählt. $\bar{z}_s$ ist hier z.B. positiv, weil man in die positive z-Richtung laufen muss, um von P zu S zu gelangen.

Koordinatentransformation (Drehung der Achsen)

Wird die Biegeachse des Querschnitts gedreht, dann ändert sich auch das FTM. Die Biegeachse kann sich z.B. dann ändern, wenn der Balken um seine Längsachse gedreht wird, während die Richtung der Last unverändert bleibt. Das einführende Beispiel mit dem Lineal ist eine solche Drehung der Biegeachse.



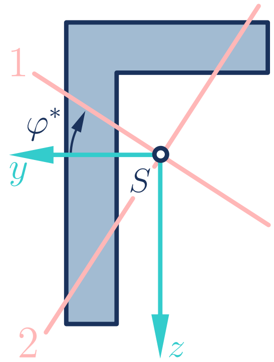
$$I_\eta = \frac{1}{2}(I_y + I_z) + \frac{1}{2}(I_y - I_z)\cos 2\varphi + I_{yz}\sin 2\varphi$$

$$I_\zeta = \frac{1}{2}(I_y + I_z) - \frac{1}{2}(I_y - I_z)\cos 2\varphi - I_{yz}\sin 2\varphi$$

$$I_{\eta\zeta} = -\frac{1}{2}(I_y - I_z)\sin 2\varphi + I_{yz}\cos 2\varphi$$

Hauptträgheitsmomente und Hauptachsen

Die größten und kleinsten FTM eines beliebigen Querschnitts werden Hauptträgheitsmomente genannt.



$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

Hinweis: I_1 (positives VZ vor der Wurzel) ist das größte, I_2 (negatives VZ) ist das kleinste FTM des Querschnitts.

Richtung der Hauptachsen (HA):

Die Achsen, bei denen die Hauptträgheitsmomente wirken, werden Hauptachsen genannt. Die erste HA gehört stets zu I_1, die zweite HA zu I_2.

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}$$

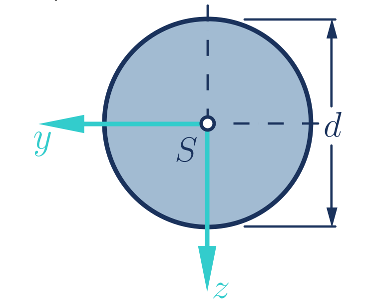
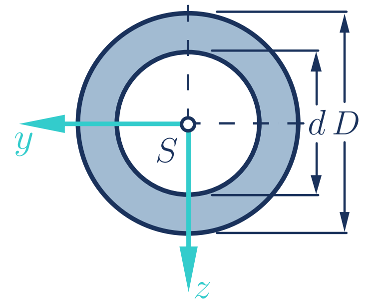
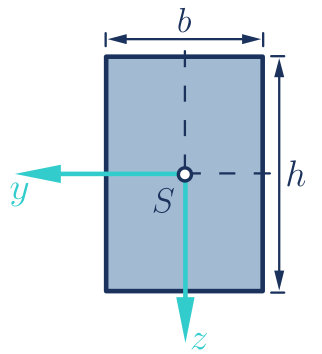
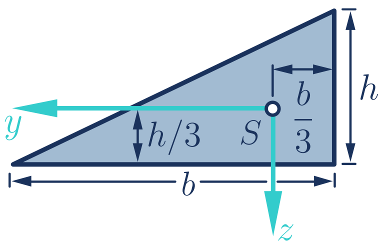
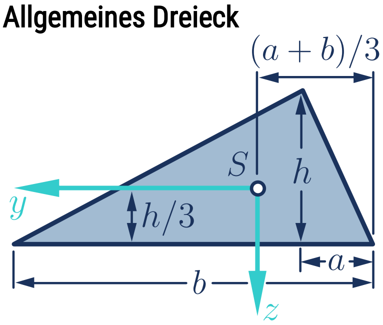
Achtung: Diese Gleichung liefert nicht zwingend die Richtung der ersten HA. Sie kann auch die Richtung der zweiten HA angeben. Die andere HA erhält man, indem $90°$ bzw. $\pi/2$ dazuaddiert werden, weil beide HA senkrecht aufeinander liegen. Welche Richtung zu welcher HA gehört, muss „manuell" geprüft werden. Das kann z.B. durch Einsetzen der Richtungen in die Transformationsgleichungen oder mithilfe einer Zeichnung des Querschnitts festgestellt werden.

Im sog. Hauptachsensystem verschwindet das Deviationsmoment. Das sieht man, wenn man die Richtungen beider HA in die Transformationsgleichung einsetzt:

$$I_{\eta\zeta}(\varphi^*) = I_{\eta\zeta}(\varphi^* + \pi/2) = 0$$

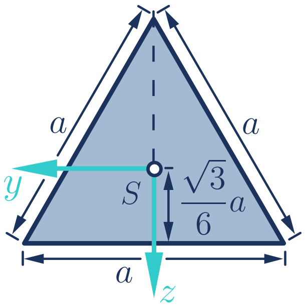
Notizen

Flächenträgheitsmomente ausgewählter Querschnitte

Kreis, Vollwelle 	$I_y = I_z = \frac{\pi}{64} d^4$ $I_{yz} = 0$
Kreisring, Hohlwelle 	$I_y = I_z = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$ $I_{yz} = 0$
Rechteck 	$I_y = \frac{bh^3}{12}$ $I_z = \frac{b^3 h}{12}$ $I_{yz} = 0$
Rechtwinkliges Dreieck 	$I_y = \frac{bh^3}{36}$ $I_z = \frac{b^3 h}{36}$ $I_{yz} = -\frac{b^2 h^2}{72}$
Allgemeines Dreieck 	$I_y = \frac{bh^3}{36}$ $I_z = \frac{bh}{36}(b^2 - ba + a^2)$ $I_{yz} = -\frac{bh^2}{72}(b - 2a)$

Flächenträgheitsmomente (Fortsetzung)

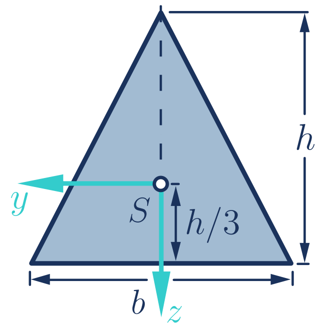
Gleichseitiges Dreieck



$$I_y = I_z = \frac{\sqrt{3}}{96}a^4$$

$$I_{yz} = 0$$

Gleichschenkliges Dreieck

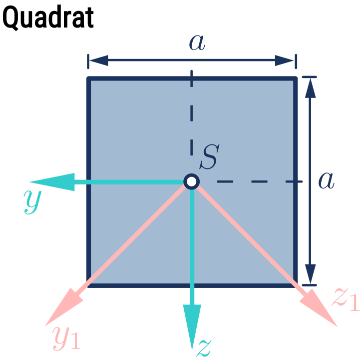


$$I_y = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_z = \frac{b^3h}{48}$$

$$I_{yz} = 0$$

Quadrat

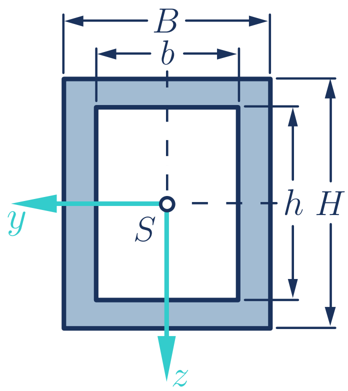


$$I_y = I_z = \frac{a^4}{12}$$

$$I_{y1} = I_y, \quad I_{z1} = I_z$$

$$I_{yz} = 0$$

Rechteckrohr, Hohlkasten

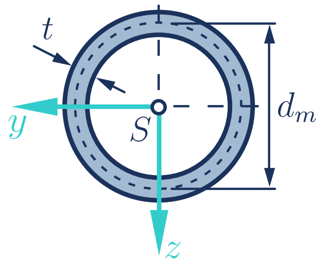


$$I_y = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$$

$$I_z = \frac{B^3H - b^3h}{12}$$

$$I_{yz} = 0$$

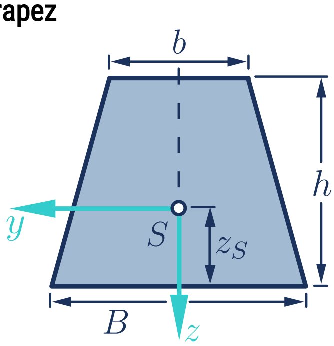
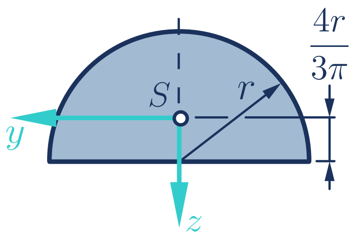
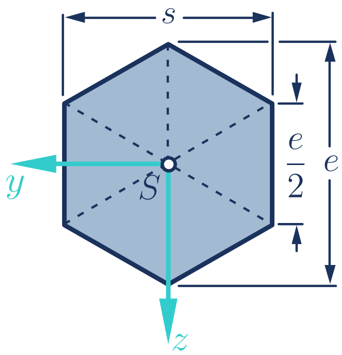
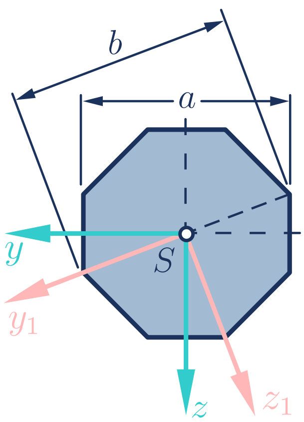
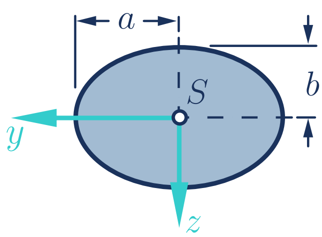
Dünnwandiges Rohr



$$I_y = I_z = \frac{\pi}{8}d_m^3 t$$

$$I_{yz} = 0$$

Flächenträgheitsmomente (Fortsetzung)

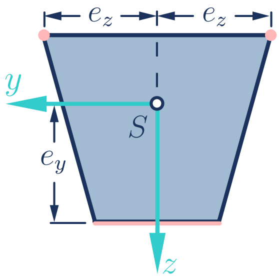
Trapez 	$I_y = \frac{h^3}{36} \cdot \frac{B^2 + 4Bb + b^2}{B + b}$ $I_{yz} = 0$ $z_S = \frac{h}{3} \frac{B + 2b}{B + b}$
Halbkreis 	$I_y = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) r^4 \approx 0{,}1098\, r^4$ $I_z \approx 0{,}392\, r^4$ $I_{yz} = 0$
Sechseck, Sechskant, Hexagon 	$I_y = I_z \approx 0{,}0338\, e^4 \approx 0{,}06\, s^4$ $I_{yz} = 0$ $s = \frac{\sqrt{3}}{2} e$
Achteck, Achtkant, Oktagon 	$I_y = I_z \approx 0{,}04\, b^4 \approx 0{,}0547\, a^4$ $I_{y1} = I_y, \quad I_{z1} = I_z$ $I_{yz} = I_{yz1} = 0$ $b = \sqrt{\frac{4 + 2 \cdot \sqrt{2}}{3 + 2 \cdot \sqrt{2}}}\, a = 1{,}082\, a$
Ellipse 	$I_y = \frac{\pi}{4} a b^3$ $I_z = \frac{\pi}{4} b a^3$ $I_{yz} = 0$

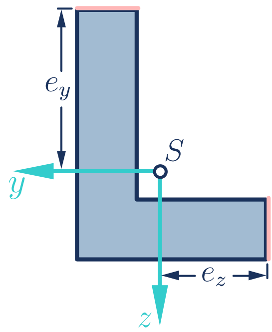
Notizen

Widerstandsmomente

Das Widerstandsmoment W ist ebenfalls ein Maß für den Widerstand bei Biegung. Im Gegensatz zum FTM sagt W etwas zur max. Biegespannung aus: Je größer W ist, desto kleiner die max. Biegespannung. Dieser Zusammenhang ist beim FTM nicht eindeutig vorhanden: Zwei verschiedene Querschnitte können ein ähnliches FTM haben, aber ein sehr unterschiedliches W. Damit entsteht bei einem der Querschnitte eine große Biegespannung, bei dem anderen nur eine kleine – trotz gleichem FTM.

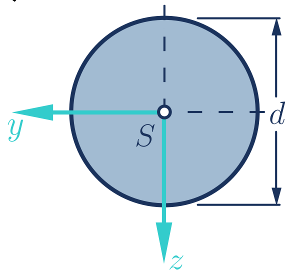
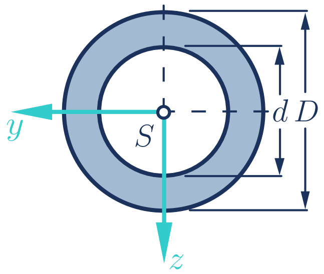
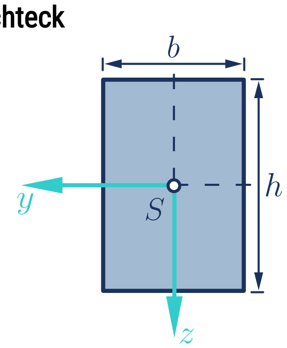
$$W_y = \frac{I_y}{e_y}, \quad W_z = \frac{I_z}{e_z}$$





1) e ist der max. Randfaserabstand (= der vom Schwerpunkt am weitesten entfernte Randpunkt in y- oder z-Richtung).
2) W hat grundsätzlich ein positives VZ. Die Abstände werden positiv eingesetzt.
3) In einigen Fällen ist es sinnvoll, e mit korrektem VZ einzusetzen. Dadurch kann W negativ werden. Das negative VZ bezieht sich dann nicht auf W, sondern auf die Biegespannung.

Widerstandsmomente ausgewählter Querschnitte

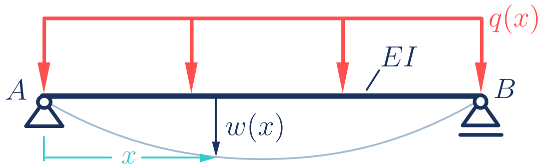
Kreis, Vollwelle 	$W_y = W_z = \frac{\pi}{32} d^3$
Kreisring, Hohlwelle 	$W_y = W_z = \frac{\pi \left(D^4 - d^4\right)}{32\,D}$
Rechteck 	$W_y = \frac{bh^2}{6}$ $W_z = \frac{hb^2}{6}$

Balkenbiegung (gerade Biegung)

Biegelinien-Differentialgleichung

Die Gleichung der Biegelinie $w(x)$ lässt sich bei bekannter Streckenlast $q(x)$ und bei konstanter Biegesteifigkeit EI durch vierfache Integration bestimmen:

$$EI\,w^{IV} = q(x)$$



Durchsenkung: $w(x)$

Biegewinkel: $w'(x) = \varphi(x)$ wird in RAD angegeben

Biegemoment: $M_b = -EIw''(x)$

Querkraft: $Q = -EIw'''(x)$

Rand- und Übergangsbedingungen

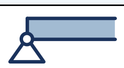
Beim Integrieren entstehen **Integrationskonstanten**. Durch sog. Rand- (RB) und Übergangsbedingungen (ÜB) lassen sich die unbekannten Konstanten bestimmen. Pro Bedingung lässt sich eine Integrationskonstante bestimmen. Daher sind immer so viele Bedingungen nötig, wie es Konstanten gibt.

Randbedingungen

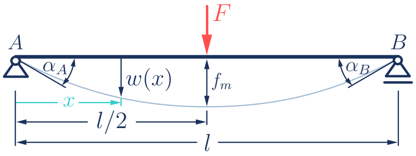
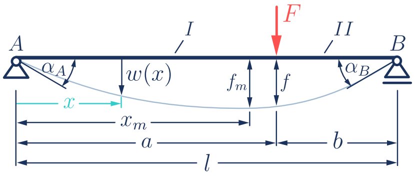
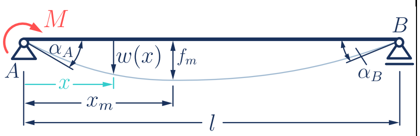
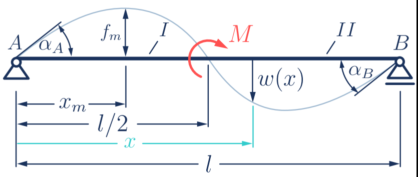
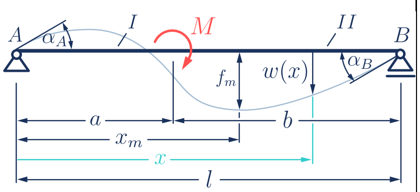
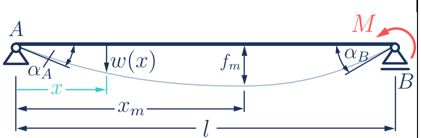
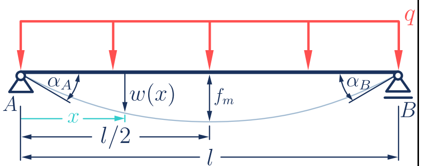
RB sorgen dafür, dass der Einfluss der Lagerung mathematisch korrekt in die Biegelinie berücksichtigt wird (z.B. kein Biegewinkel bei einer Einspannung). An jedem Rand liegen jeweils zwei RB vor.

Übergangsbedingungen

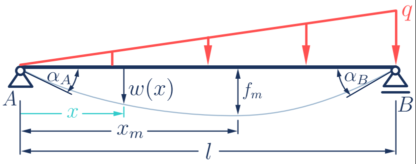
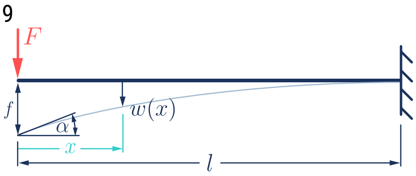
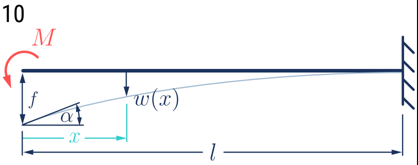
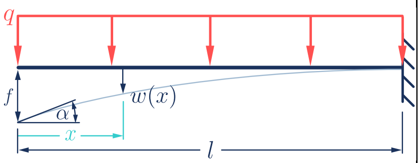
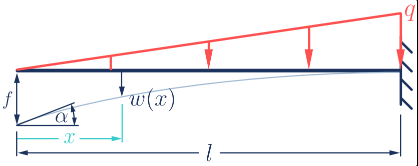
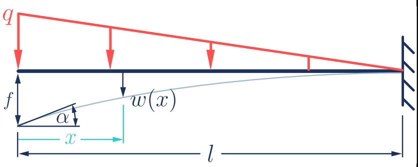
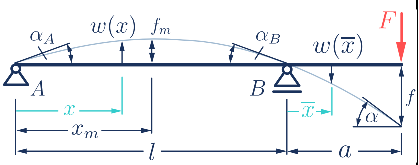
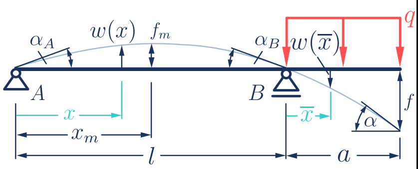
Sind notwendig, sobald mehrere Bereiche am Balken vorliegen. Die ÜB sorgen dafür, dass benachbarte Bereiche mathematisch korrekt „gekoppelt" werden (z.B. kein plötzlicher Knick am Übergang).

Lager		Geometrische RB		Statische RB	
		w	w'	M_b	Q
Fest-/Loslager		$=0$	$\neq 0$	$=0$	$\neq 0$
Einspannung		$=0$	$=0$	$\neq 0$	$\neq 0$
Freies Ende		$\neq 0$	$\neq 0$	$=0$	$=0$
Parallelführung		$\neq 0$	$=0$	$\neq 0$	$=0$

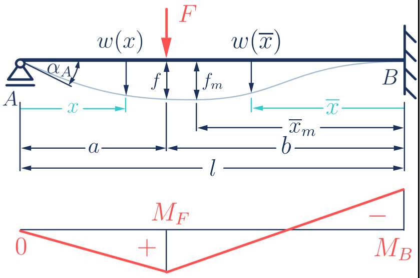
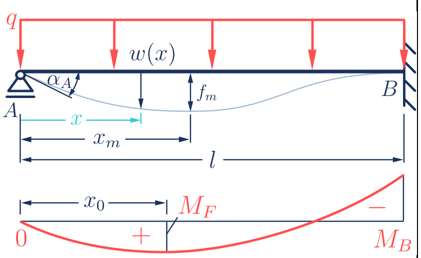
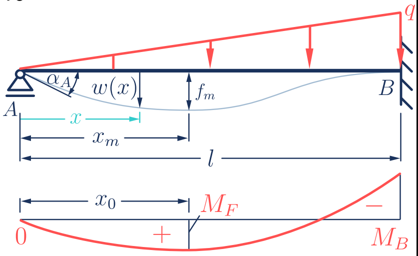
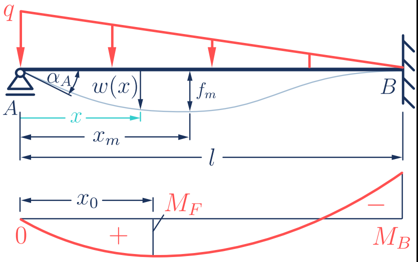
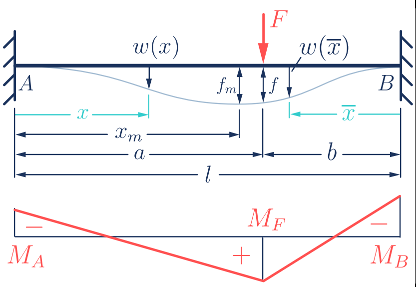
Biegelinientafel für statisch bestimmte Systeme

Fall	Biegelinie	Absenkung	Biegewinkel
1 	$0 \le x \le l/2$: $w(x) = \frac{Fl^3}{48EI_y}\left[3\frac{x}{l} - 4\left(\frac{x}{l}\right)^3\right]$ $l/2 < x \le l$: *Symmetrie nutzen*	$f_m = \frac{Fl^3}{48EI_y}$	$\alpha_A = \alpha_B = \frac{Fl^2}{16EI_y}$
2 	$0 \le x \le a$: $w_I(x) = \frac{Fab^2}{6EI_y}\left[\left(1+\frac{l}{b}\right)\frac{x}{l} - \frac{x^3}{abl}\right]$ $a < x \le l$: $w_{II}(x) = \frac{Fa^2b}{6EI_y}\left[\left(1+\frac{l}{a}\right)\frac{l-x}{l} - \frac{(l-x)^3}{abl}\right]$	$f = \frac{Fa^2b^2}{3EI_yl}$ $a > b$: $f_m = \frac{Fb\sqrt{(l^2-b^2)^3}}{9\sqrt{3}EI_yl}$, $x_m = \sqrt{\frac{l^2-b^2}{3}}$ $a < b$: $f_m = \frac{Fa\sqrt{(l^2-a^2)^3}}{9\sqrt{3}EI_yl}$, $x_m = l - \sqrt{\frac{l^2-a^2}{3}}$	$\alpha_A = \frac{Fab\,(l+b)}{6EI_yl}$ $\alpha_B = \frac{Fab\,(l+a)}{6EI_yl}$
3 	$w(x) = \frac{Ml^2}{6EI_y}\left[2\frac{x}{l} - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right]$	$f_m = \frac{Ml^2}{9\sqrt{3}EI_y}$ $x_m = l - \frac{l}{\sqrt{3}}$ $w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Ml^2}{16EI_y}$	$\alpha_A = \frac{Ml}{3EI_y}$ $\alpha_B = \frac{Ml}{6EI_y}$
4 	$0 \le x \le l/2$: $w_I = \frac{Ml^2}{24EI_y}\left[-\frac{x}{l} + 4\left(\frac{x}{l}\right)^3\right]$ $l/2 < x \le l$: $w_{II} = \frac{Ml^2}{24EI_y}\left[-3 + 11\frac{x}{l} - 12\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{l}\right)^3\right]$	$f_{m_I} = f_{m_{II}} = \frac{Ml^2}{72\sqrt{3}EI_y}$ $x_{m_I} = \frac{l}{2\sqrt{3}}$ $x_{m_{II}} = l - x_{m_I}$	$\alpha_A = \alpha_B = \frac{Ml}{24EI_y}$
5 	$C = \frac{Ml^2}{6EI_y}$ $0 \le x \le a$: $w_I = C\left[\left(2 - 6\frac{a}{l} + 3\frac{a^2}{l^2}\right)\frac{x}{l} + \frac{x^3}{l^3}\right]$ $a < x \le l$: $w_{II} = -C\left[3\frac{a^2}{l^2} - \left(2 + 3\frac{a^2}{l^2}\right)\frac{x}{l} + 3\frac{x^2}{l^2} - \frac{x^3}{l^3}\right]$	$a > b$: $f_m = -w_I(x_m)$, $x_m = l\sqrt{\frac{2a}{l} - \frac{2}{3} - \frac{a^2}{l^2}}$ $a < b$: $f_m = -w_{II}(x_m)$, $x_m = l - l\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{a^2}{l^2}}$	$\alpha_A = -\frac{C}{l}\left(2 - 6\frac{a}{l} + 3\frac{a^2}{l^2}\right)$ $\alpha_B = \frac{C}{l}\left(1 - 3\frac{a^2}{l^2}\right)$
6 	$w(x) = \frac{Ml^2}{6EI_y}\left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^3\right]$	$f_m = \frac{Ml^2}{9\sqrt{3}EI_y}$ $x_m = \frac{l}{\sqrt{3}}$ $w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Ml^2}{16EI_y}$	$\alpha_A = \frac{Ml}{6EI_y}$ $\alpha_B = \frac{Ml}{3EI_y}$
7 	$w(x) = \frac{ql^4}{24EI_y}\left[\frac{x}{l} - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^4\right]$	$f_m = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI_y}$	$\alpha_A = \alpha_B = \frac{ql^3}{24EI_y}$

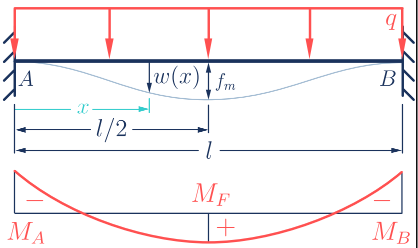
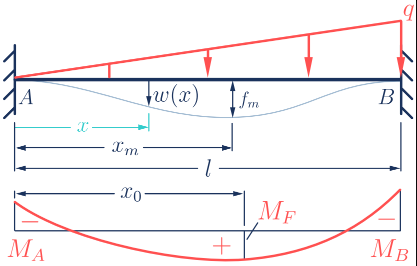
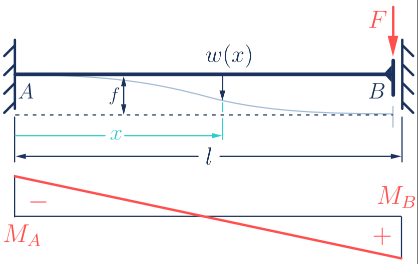
Biegelinientafel für statisch bestimmte Systeme (Fortsetzung)

Fall	Biegelinie	Absenkung	Biegewinkel
8 	$w(x)=\frac{ql^4}{360EI_y}\left[7\frac{x}{l}-10\left(\frac{x}{l}\right)^3+3\left(\frac{x}{l}\right)^5\right]$	$f_m=\frac{ql^4}{360EI_y}\cdot 2{,}345$ $x_m=0{,}519l$	$\alpha_A=\frac{7ql^3}{360EI_y}$ $\alpha_B=\frac{8ql^3}{360EI_y}$
9 	$w(x)=\frac{Fl^3}{6EI_y}\left[2-3\frac{x}{l}+\left(\frac{x}{l}\right)^3\right]$	$f=\frac{Fl^3}{3EI_y}$	$\alpha=\frac{Fl^2}{2EI_y}$
10 	$w(x)=\frac{Ml^2}{2EI_y}\left[1-2\frac{x}{l}+\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]$	$f=\frac{Ml^2}{2EI_y}$	$\alpha=\frac{Ml}{EI_y}$
11 	$w(x)=\frac{ql^4}{24EI_y}\left[3-4\frac{x}{l}+\left(\frac{x}{l}\right)^4\right]$	$f=\frac{ql^4}{8EI_y}$	$\alpha=\frac{ql^3}{6EI_y}$
12 	$w(x)=\frac{ql^4}{120EI_y}\left[4-5\frac{x}{l}+\left(\frac{x}{l}\right)^5\right]$	$f=\frac{ql^4}{30EI_y}$	$\alpha=\frac{ql^3}{24EI_y}$
13 	$w=\frac{ql^4}{120EI_y}\left[11-15\frac{x}{l}+5\left(\frac{x}{l}\right)^4-\left(\frac{x}{l}\right)^5\right]$	$f=\frac{11ql^4}{120EI_y}$	$\alpha=\frac{ql^3}{8EI_y}$
14 	$0\le x\le l:$ $w(x)=-\frac{Fal^2}{6EI_y}\left[\frac{x}{l}-\left(\frac{x}{l}\right)^3\right]$ $0\le\overline{x}\le a:$ $w(\overline{x})=\frac{Fa^3}{6EI_y}\left[2\frac{l\overline{x}}{a^2}+3\left(\frac{\overline{x}}{a}\right)^2-\left(\frac{\overline{x}}{a}\right)^3\right]$	$f_m=\frac{Fal^2}{9\sqrt{3}EI_y}$ $x_m=\frac{l}{\sqrt{3}}$ $f=\frac{Fa^2\,(l+a)}{3EI_y}$	$\alpha_A=\frac{Fal}{6EI_y}$ $\alpha_B=\frac{Fal}{3EI_y}$ $\alpha=\frac{Fa\,(2l+3a)}{6EI_y}$
15 	$0\le x\le l:$ $w(x)=-\frac{qa^2l^2}{12EI_y}\left[\frac{x}{l}-\left(\frac{x}{l}\right)^3\right]$ $0\le\overline{x}\le a:$ $w(\overline{x})=\frac{qa^4}{24EI_y}\left[4\frac{l\overline{x}}{a^2}+6\frac{\overline{x}^2}{a^2}-4\frac{\overline{x}^3}{a^3}+\frac{\overline{x}^4}{a^4}\right]$	$f_m=\frac{qa^2l^2}{18\sqrt{3}EI_y}$ $x_m=\frac{l}{\sqrt{3}}$ $f=\frac{qa^3\,(4l+3a)}{24EI_y}$	$\alpha_A=\frac{qa^2l}{12EI_y}$ $\alpha_B=\frac{qa^2l}{6EI_y}$ $\alpha=\frac{qa^2\,(l+a)}{6EI_y}$

Biegelinientafel für statisch überbestimmte Systeme

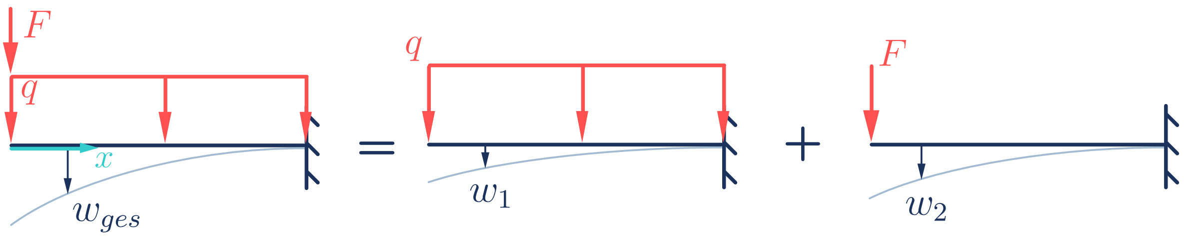
Fall + Momentenlinie	Biegelinie + Winkel	Absenkung	Lagerreaktionen
16 	$0 \le x \le a:$ $w(x) = \frac{Flb^2}{4EI_y}\left[\frac{ax}{l^2} - \frac{2}{3}\left(1+\frac{a}{2l}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^3\right]$ $0 \le \bar{x} \le b:$ $w = \frac{Fl^2a}{4EI_y}\left[\left(1-\frac{a^2}{l^2}\right)\frac{\bar{x}^2}{l^2} - \left(1-\frac{a^2}{3l^2}\right)\frac{\bar{x}^3}{l^3}\right]$ $\alpha_A = \frac{Fab^2}{4EI_y l}$	$f = \frac{Fa^2b^3}{4EI_y l^2}\left(1+\frac{a}{3l}\right)$ $a \le 0,414l:$ $f_m = w(\bar{x}_m)$ $\bar{x}_m = \frac{b\,(1+l/a)}{1+3b/2a+b/2l}$ $a \ge 0,414l:$ $f_m = w(x_m)$ $x_m = l\sqrt{\frac{a/2l}{1+a/2l}}$	$F_A = F\left(\frac{b}{l}\right)^2\left(1+\frac{a}{2l}\right)$ $F_B = F\left(\frac{a}{l}\right)^2\left(1+\frac{b}{2l}+\frac{3}{2}\frac{b}{a}\right)$ $M_B = -F\left(\frac{ab}{l}\right)\left(1-\frac{b}{2l}\right)$ $M_F = F\frac{ab^2}{l^2}\left(1+\frac{a}{2l}\right)$
17 	$w(x) = \frac{ql^4}{48EI_y}\left[\frac{x}{l} - 3\left(\frac{x}{l}\right)^3 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^4\right]$ $\alpha_A = \frac{ql^3}{48EI_y}$	$f_m = \frac{ql^4}{185EI_y}$ $x_m = 0,4215\,l$	$F_A = \frac{3}{8}\,ql$ $F_B = \frac{5}{8}\,ql$ $M_B = -\frac{1}{8}\,ql^2$ $M_F = \frac{9}{128}\,ql^2$ $x_0 = \frac{3}{8}\,l$
18 	$w(x) = \frac{ql^4}{120EI_y}\left[\frac{x}{l} - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^5\right]$ $\alpha_A = \frac{ql^3}{120EI_y}$	$f_m = \frac{ql^4}{419EI_y}$ $x_m = \frac{l}{\sqrt{5}}$	$F_A = \frac{ql}{10}$ $F_B = \frac{4}{10}ql$ $M_B = -\frac{ql^2}{15}$ $M_F = 0,0298\,ql^2$ $x_0 = x_m = \frac{l}{\sqrt{5}}$
19 	$w = \frac{ql^4}{240EI_y}\left[3\frac{x}{l} - 11\frac{x^3}{l^3} + 10\frac{x^4}{l^4} - 2\frac{x^5}{l^5}\right]$ $\alpha_A = \frac{ql^3}{80EI_y}$	$f_m = \frac{ql^4}{328EI_y}$ $x_m = 0,4025\,l$	$F_A = \frac{11}{40}\,ql$ $F_B = \frac{9}{40}\,ql$ $M_B = -\frac{7}{120}\,ql^2$ $M_F = 0,0423\,ql^2$ $x_0 = 0,329\,l$
20 	$0 \le x \le a:$ $w(x) = \frac{Flb^2}{6EI_y}\left[3\frac{a}{l}\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(1+\frac{2a}{l}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^3\right]$ $0 \le \bar{x} \le b:$ $w(\bar{x}) = \frac{Fla^2}{6EI_y}\left[3\frac{b}{l}\left(\frac{\bar{x}}{l}\right)^2 - \left(1+\frac{2b}{l}\right)\left(\frac{\bar{x}}{l}\right)^3\right]$	$f = \frac{Fa^3b^3}{3EI_y l^3}$ $a > b:$ $f_m = \frac{2Fa^3b^2}{3EI_y l^2}\left(\frac{1}{1+2a/l}\right)^2$ $x_m = \frac{l}{1+l/2a}$ $a < b:$ $f_m = \frac{2Fa^2b^3}{3EI_y l^2}\left(\frac{1}{1+2b/l}\right)^2$ $x_m = \frac{l}{1+l/2a}$	$F_A = F\left(\frac{b}{l}\right)^2\left(1+2\frac{a}{l}\right)$ $F_B = F\left(\frac{a}{l}\right)^2\left(1+2\frac{b}{l}\right)$ $M_A = -Fa\left(\frac{b}{l}\right)^2$ $M_B = -Fb\left(\frac{a}{l}\right)^2$ $M_F = 2Fl\left(\frac{a}{l}\right)^2\left(\frac{b}{l}\right)^2$

Biegelinientafel für statisch überbestimmte Systeme (Fortsetzung)

Fall + Momentenlinie	Biegelinie + Winkel	Absenkung	Lagerreaktionen
21 	$w(x) = \frac{ql^4}{24EI_y}\left[\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^4\right]$	$f = \frac{ql^4}{384EI_y}$	$F_A = F_B = \frac{1}{2}ql$ $M_A = M_B = -\frac{1}{12}ql^2$ $M_F = \frac{1}{24}ql^2$
22 	$w = \frac{ql^4}{120EI_y}\left[2\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^5\right]$	$f_m = \frac{ql^4}{764EI_y}$ $x_m = 0,525\,l$	$F_A = \frac{3}{20}ql$ $F_B = \frac{7}{20}ql$ $M_A = -\frac{ql^2}{30}$ $M_B = -\frac{ql^2}{20}$ $M_F = 0,0214\,ql^2$ $x_0 = l\sqrt{\frac{3}{10}} = 0,548\,l$
23 	$w(x) = \frac{Fl^3}{12EI_y}\left[3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3\right]$	$f = \frac{Fl^3}{12EI_y}$	$F_A = F$ $F_B = 0$ $M_A = -\frac{Fl}{2}$ $M_B = \frac{Fl}{2}$

Überlagerung, Superpositionsprinzip

Liegt ein Lastfall vor, der sich aus einer Kombination von Lastfällen aus der Biegelinientafel rekonstruieren lässt, dann kann man die Gesamt-Biegelinie durch das reine Addieren der Biegelinien von den zugehörigen Lastfällen ermitteln:

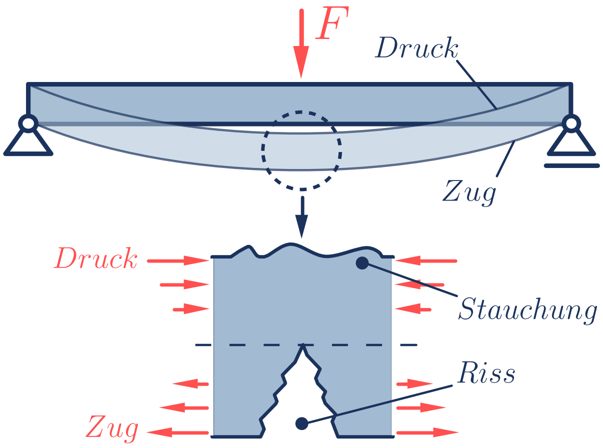


$$w_{ges}(x) = w_1(x) + w_2(x)$$

Das sog. Superpositionsprinzip lässt sich auch auf Lagerreaktionen, Schnittgrößen und auf Biegewinkel anwenden: Durch das reine Addieren der zugehörigen Größen der Einzelsysteme lässt sich die entsprechende Größe für das Gesamt-System ermitteln.

Biegenormalspannung

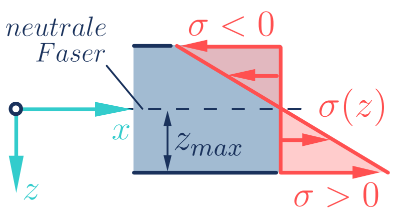
Biegung verursacht im Balkenquerschnitt eine Normalspannung, also eine senkrecht auf dem Querschnitt stehende Spannung. Es treten dabei stets Zug- und Druckspannungen gleichzeitig auf.



Ersetzt man den Balken durch einen Radiergummi, dann erkennt man gut, dass bei der abgebildeten Belastung die Oberseite des Balkens gestaucht wird, während die Unterseite gedehnt oder gar gerissen wird.

Die Biegespannung ist linear über die Höhe des Querschnitts (z-Koordinate) verteilt:

$$\sigma(z) = \frac{M}{I_y} z$$

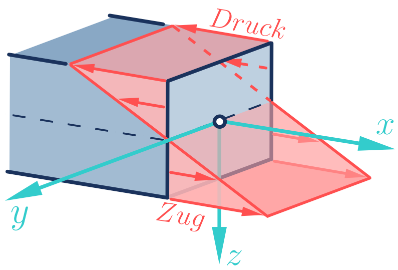


Die maximale Spannung tritt am Rand auf:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{I_y} z_{max}$$

Alternativ über das Widerstandsmoment:

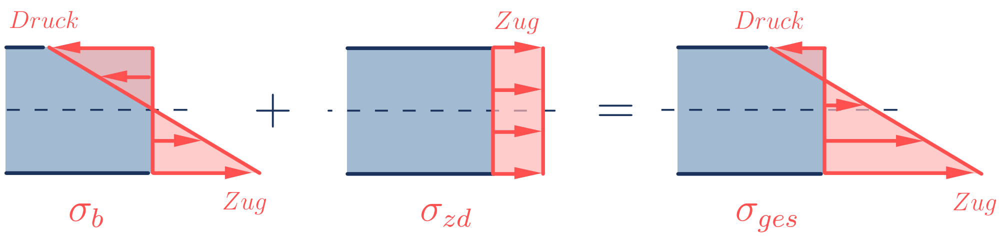
$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_y}$$



Wirken zusätzlich durch Zug- oder Druckkräfte verursachte Normalspannungen, dann werden diese nach dem Überlagungsprinzip dazuaddiert:

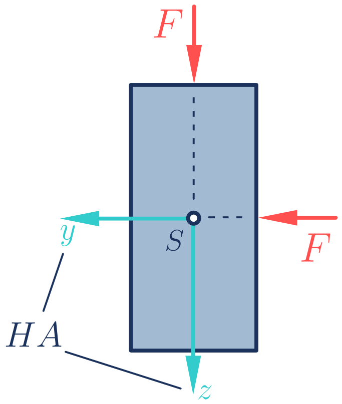
$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I_y} z$$

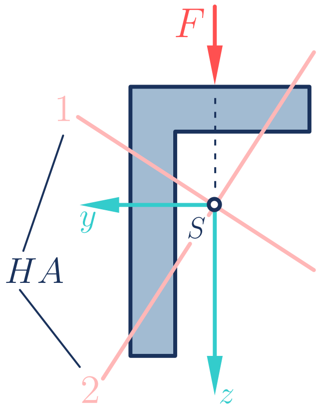
Eine zusätzliche Zugkraft verstärkt damit die Zug- und reduziert die Druckspannung.



Schiefe Biegung

Schiefe oder zweiachsige Biegung liegt vor, wenn es beim Balken zur Durchbiegung in z- und in y-Richtung kommt. Es gibt zwei Möglichkeiten, wie es dazu kommen kann:





Fall 1: Es wirken Kräfte in Richtung der Hauptachsen (HA) bzw. es wirken Momente um die Richtungen der HA. Die Durchbiegungen in y- und z-Richtung sind unabhängig voneinander.

Fall 2: Die Last wirkt nicht in Richtung der HA. Dadurch kommt es „automatisch" zu Durchsenkungen in beiden Richtungen der HA. Die Durchbiegungen sind nicht unabhängig voneinander.

Biegelinien-Differentialgleichung bei schiefer Biegung

Durchbiegung in z-Richtung:

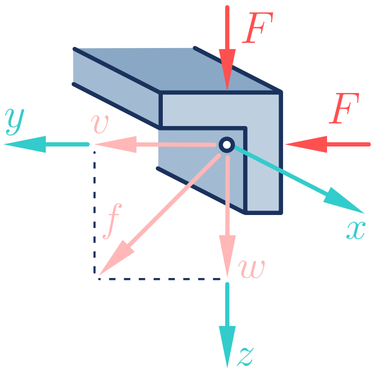
$$Ew'' = \frac{-M_y I_z + M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

Durchbiegung in y-Richtung:

$$Ev'' = \frac{M_z I_y - M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

Für den Sonderfall $I_{yz} = 0$ (Fall 1) gilt:

$$EI_y\, w'' = -M_y$$
$$EI_z\, v'' = M_z$$



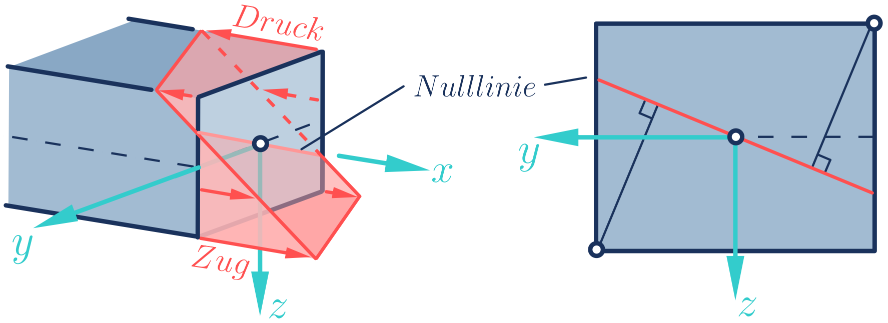
$$f = \sqrt{w^2 + v^2}$$

Notizen

Biegenormalspannung und Spannungsnulllinie

Bei schiefer Biegung ist die Biegespannung linear über y und z verteilt. Damit ergibt sich eine Ebenengleichung:

$$\sigma(y,z) = \frac{[M_y I_z - M_z I_{yz}]z - [M_z I_y - M_y I_{yz}]y}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$



Dort wo die Spannungsebene die y-z-Ebene schneidet, entsteht die Nulllinie der Spannung. Auf dieser Geraden ist $\sigma = 0$. Setzt man für die obige Spannung null ein und stellt nach z um, erhält man die Gleichung der Nulllinie:

$$z = \frac{M_z I_y - M_y I_{yz}}{M_y I_z - M_z I_{yz}} y$$

Die im Querschnitt am weitesten entfernten Punkte von der Nulllinie liefern die maximale Biegespannung (senkrechter Abstand zur Nulllinie).

Für den Sonderfall $I_{yz} = 0$ (Fall 1) vereinfachen sich die Gleichungen zu:

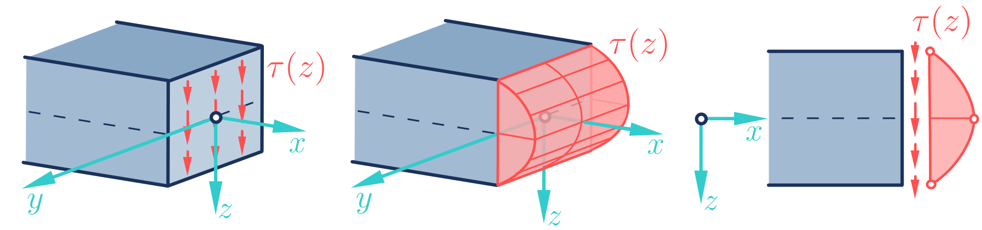
$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y \qquad\qquad z = \frac{M_z I_y}{M_y I_z} y$$

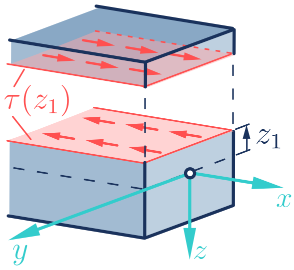
Hinweis: Wirken zusätzlich Zug- oder Druckspannungen, dann werden sie nach dem Überlagerungsprinzip zur Biegespannung addiert. Die Spannungsnulllinie ist dann für den Einzelfall aus dem Ansatz $\sigma = 0$ zu ermitteln.

Notizen

Schubspannung infolge Querkraft (Querkraftschub)

Querkräfte verursachen im Balkeninneren Schubspannungen. Sie sind über die Höhe des Querschnitts veränderlich.





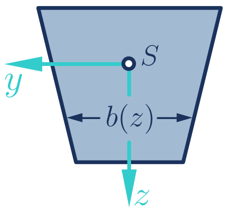
Die Schubspannungen im Querschnitt tauchen auch in **Längsrichtung** des Balkens auf. Sie werden zugeordnete Schubspannungen genannt.

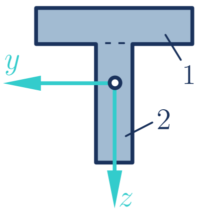
Schubspannungen sind von der Querkraft und somit auch von der x-Koordinate abhängig (Schnittgrößen).

Schubspannung

Bei allgemeinen Querschnitten

Bei Querschnitten mit veränderlicher Breite ist die Funktion der Breite zu ermitteln. Für Querschnitte mit sprunghafter Änderung der Breite muss eine Unterteilung erfolgen – die Schubspannung wird dann für jede Teilfläche einzeln berechnet.

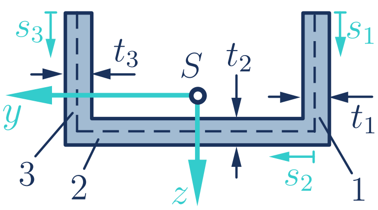




$$\tau(z) = \frac{Q\,S(z)}{I_y\,b(z)}$$

Dünnwandige offene Querschnitte

Bei dünnwandigen Querschnitten wird eine Koordinate s eingeführt, die entlang der Profilmittellinien der einzelnen Teilflächen zeigt. Die Schubspannung wird für jeden Abschnitt einzeln berechnet.

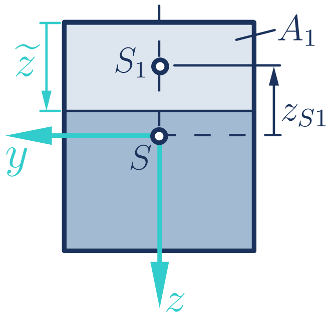


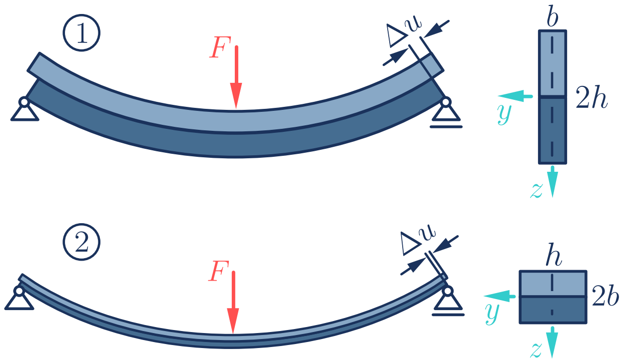
$$\tau(s) = \frac{Q\,S(s)}{I_y\,t(s)}$$

Statisches Moment

Das statische Moment (SM) ist ein geometrischer Kennwert des Querschnitts. Er ist das Produkt aus dem Flächeninhalt einer Teilfläche und dem Abstand dieser Fläche vom Gesamtschwerpunkt (linke Abb.):

$$S\left(\tilde{z}\right) = A_1 \cdot z_{S1}$$

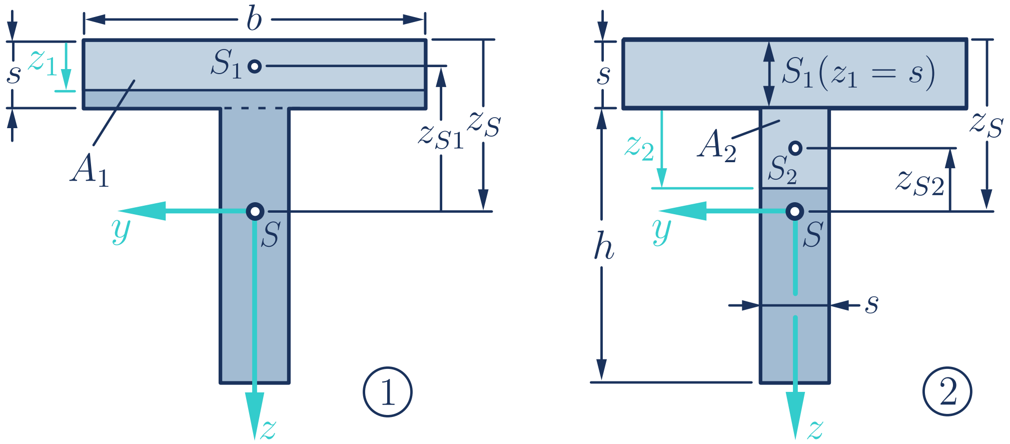




Balken mit großem SM leiden unter höherem Schub. Das ist in 1 gut erkennbar, wo die Schubwirkung für eine große Verschiebung Δu am Balkenende sorgt. In 2 ist das SM kleiner - daher ist auch die Verschiebung kleiner. Zur Erinnerung: Die Schubspannung wirkt auch in Längsrichtung des Balkens (zugeordnete Schubspannung).

Allgemeine Querschnitte:

Bei zusammengesetzten Querschnitten muss das SM für jeden Abschnitt wie folgt einzeln ermittelt werden:



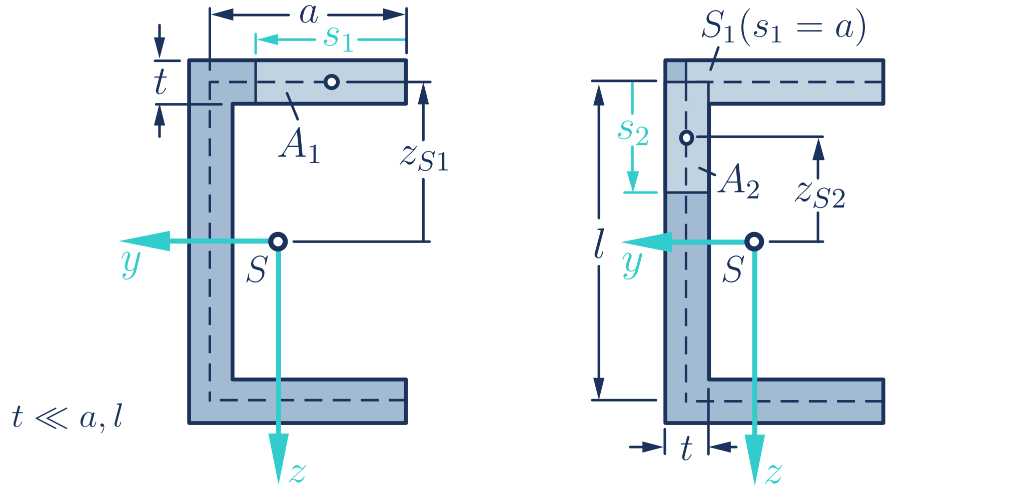
Intervall:	$0 \leq z_1 \leq s$	$0 \leq z_2 \leq h$
Fläche:	$A_1 = z_1 \cdot b$	$A_2 = z_2 \cdot s$
Abstand:	$z_{S1} = -z_S + z_1/2$	$z_{S2} = -z_S + s + z_2/2$
SM:	$S_1(z_1) = A_1 \cdot z_{S1}$	$S_2(z_2) = A_2 \cdot z_{S2} + S_1(z_1 = s)$

1) Die Lage des Gesamtschwerpunkts muss bekannt sein.
2) Dieselben Intervalle und dieselbe Aufteilung müssen auch für die Schubspannungen verwendet werden.
3) Es ist auf das korrekte VZ bei den Abständen zu achten.
4) Symmetrien dürfen genutzt werden (z.B. beim Doppel-T-Träger).

Statisches Moment (Fortsetzung)

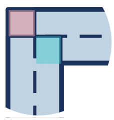
Dünnwandige offene Querschnitte:

Bei zusammengesetzten dünnwandigen offenen Querschnitten muss das SM für jeden Abschnitt wie folgt einzeln ermittelt werden:



Intervall:	$0 \leq s_1 \leq a$	$0 \leq s_2 \leq l$
Fläche:	$A_1 = s_1 \cdot t$	$A_2 = s_2 \cdot t$
Abstand:	$z_{S1} = -l/2$	$z_{S2} = -l/2 + s_2/2$
SM:	$S_1(s_1) = A_1 \cdot z_{S1}$	$S_2(s_2) = A_2 \cdot z_{S2} + S_1(s_1 = a)$

1) Die Lage des Gesamtschwerpunkts muss bekannt sein.
2) Dieselben Intervalle und dieselbe Aufteilung müssen auch für die Schubspannungen verwendet werden.
3) Bei dünnwandigen Querschnitten wird für jeden Abschnitt eine Laufkoordinate s eingeführt, die entlang der Profilmittellinie geht.
4) Es ist auf das korrekte VZ bei den Abständen zu achten.
5) Symmetrien nutzen: Für den dritten Bereich kann das SM des ersten Bereichs genutzt werden.
6) Am Übergang kommt es zu einer Überschneidung: Das grüne Quadrat wird doppelt gezählt, das rote dafür gar nicht. Bei dünnwandigen Querschnitten kann das vernachlässigt werden.

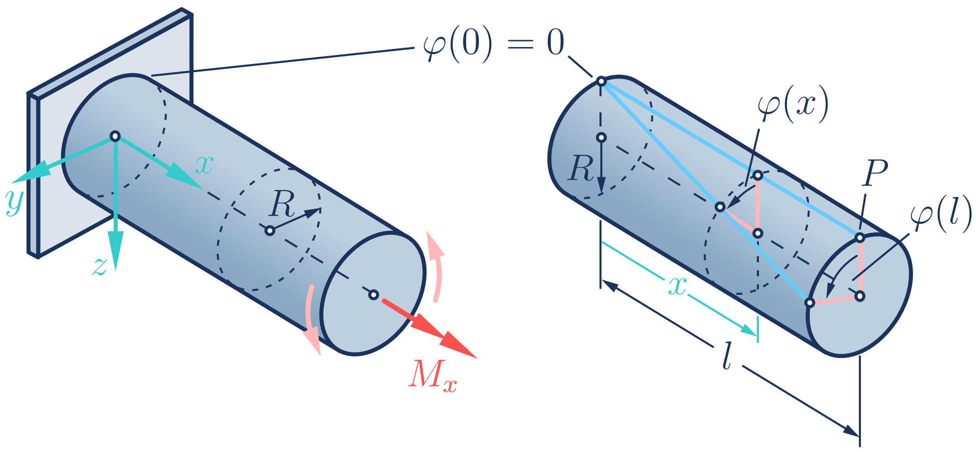


Torsion

Torsion liegt vor, wenn ein Drehmoment um die Längsachse eines Balkens wirkt und ihn dadurch verdreht bzw. tordiert. Drehmomente, die um Längsachsen wirken, werden Torsionsmomente genannt.

Verdrehwinkel

Die wichtigste Kenngröße für die Verformung bei Torsion ist die Verdrehung der Querschnitte gegenüber dem unverformtem Zustand.



Der abgebildete Stab ist in der Wand fest eingespannt und kann sich deswegen dort nicht verdrehen. Am freien Ende ist die Verdrehung maximal: Der Punkt P wandert in Lastrichtung um den Verdrehwinkel an dieser Stelle.

$$\varphi'(x) = \frac{M_T}{GI_T}$$

1) M_T ist dabei mit richtigem Vorzeichen aus den Schnittgrößen einzusetzen.
2) Bei Balken mit mehreren Bereichen muss der Verdrehwinkel für jeden Bereich einzeln integriert werden (inkl. Rand- und Übergangsbedingungen).
3) Der Verdrehwinkel wird in RAD berechnet.
4) Für den oben gezeigten Sonderfall (einseitige Einspannung) beträgt der maximale Verdrehwinkel:

$$\varphi(x = l) = \frac{M_T\, l}{GI_T}$$

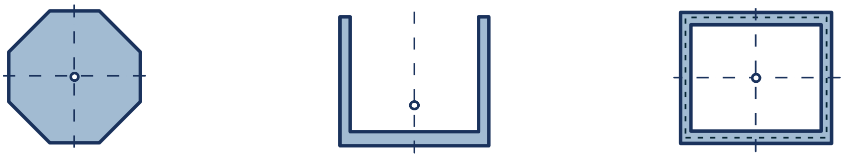
Schubspannung infolge Torsion

Maximale Schubspannung (für alle Querschnitte)

Die maximale Schubspannung tritt i.d.R. am äußeren Rand des Querschnitts auf und kann mithilfe des Torsionswiderstandsmoments W_T bestimmt werden:

$$\tau_{max} = \frac{M_T}{W_T}$$

Gilt für:

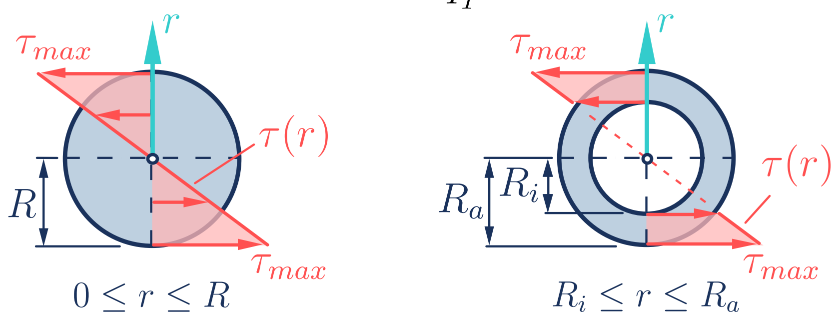


Allgemeine Voll- und Hohlprofile | Dünnwandige offene Profile | Dünnwandige geschlossene Profile

Schubspannung bei runden Querschnitten

Bei kreisförmigen Querschnitten ist die Schubspannung linear über den Radius verteilt und kann mit dem Torsionsträgheitsmoment I_T bestimmt werden:

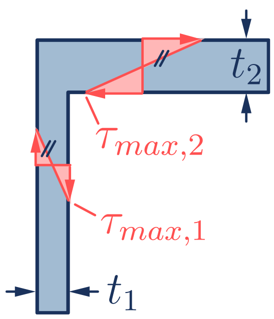
$$\tau(r) = \frac{M_T}{I_T}\, r$$



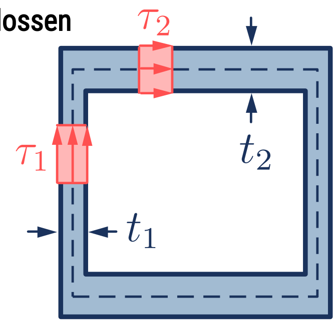
Hinweis: Die Torsionsspannung ist nicht bei allen Querschnitten linear verteilt.

Schubspannung bei dünnwandigen Querschnitten

offen



geschlossen



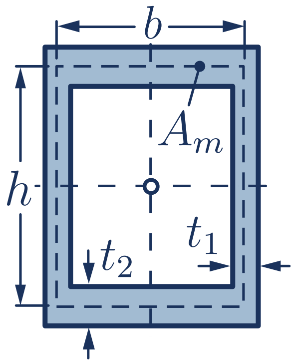
Die Schubspannung ist linear über die Wanddicke verteilt. Daher: **Größte Schubspannung im Abschnitt mit der größten Wanddicke**, weil die Spannung mehr Material hat, um sich auszubreiten. Die linearen Verläufe der Schubspannungen haben in jedem Abschnitt denselben Anstieg.

Die „Schubkraft" ist in jedem Abschnitt gleich groß und die Schubspannungen sind in jedem Abschnitt konstant über die Wanddicke verteilt. Daher: **Größte Schubspannung im Abschnitt mit der kleinsten Wanddicke**, weil sich dort die Last auf eine kleine „Fläche" verteilt. Es gilt:
$\tau_1\, t_1 = \tau_2\, t_2$

Notizen

Torsionswiderstandsmomente und -flächenträgheitsmomente

Dünnwandige geschlossene Profile



$$I_T = \frac{4A_m^2}{\oint \frac{\mathrm{d}s}{t}} = \frac{4A_m^2}{\frac{l_1}{t_1} + \frac{l_2}{t_2} + \ldots}$$

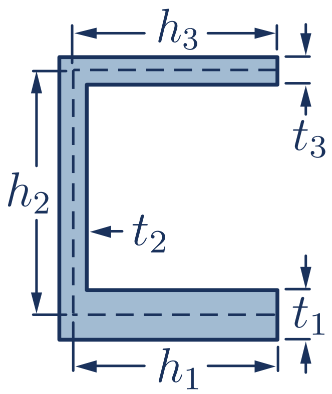
$$W_T = 2\, A_m\, t_{min}$$

Dabei ist A_m die von der Profilmittellinie umschlossene Fläche.

Für den abgebildeten Kastenquerschnitt mit $t_1 < t_2$ gilt:

$$I_T = \frac{4(bh)^2}{2\,\frac{h}{t_1} + 2\,\frac{b}{t_2}} \qquad W_T = 2\,(bh)\,t_1$$

Dünnwandige offene Profile



Dünnwandige offene Profile bestehen abschnittsweise aus einzelnen rechteckigen Streifen.

$$I_T \approx \frac{1}{3}\sum h_i\, t_i^3 = \frac{1}{3}(h_1\, t_1^3 + h_2\, t_2^3 + \ldots)$$

$$W_T \approx \frac{1}{3}\frac{\sum h_i\, t_i^3}{t_{max}} = \frac{I_T}{t_{max}}$$

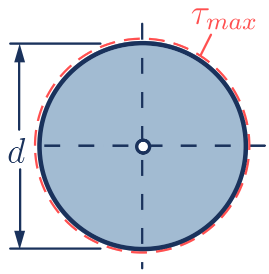
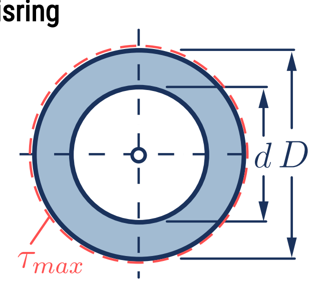
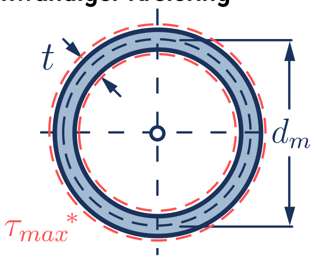
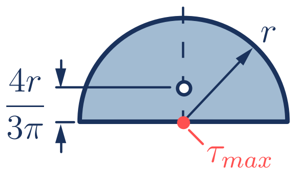
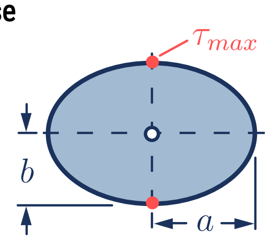
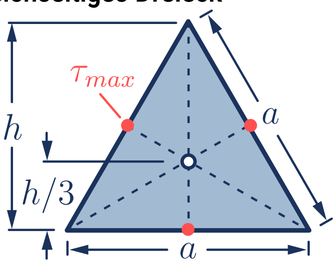
Gekrümmte Profile (z.B. dünnwandiges geschlitztes Rohr) werden zu einem geraden Streifen abgewickelt.

Für den abgebildeten Querschnitt mit $t_{max} = t_1$ gilt:

$$I_T \approx \frac{1}{3}(h_1\, t_1^3 + h_2\, t_2^3 + h_3\, t_3^3) \qquad W_T \approx \frac{h_1\, t_1^3 + h_2\, t_2^3 + h_3\, t_3^3}{3\, t_1}$$

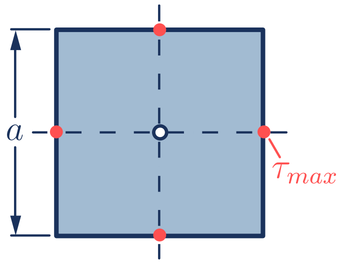
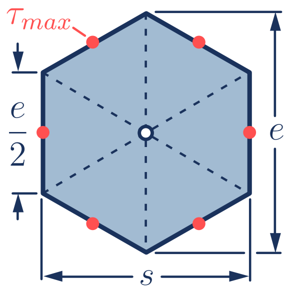
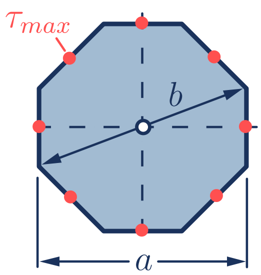
Torsionswiderstandsmomente und -flächenträgheitsmomente

Ausgewählte Querschnitte

Kreis 	$I_T = I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi r^4}{2}$ $W_T = W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi r^3}{2}$
Kreisring 	$I_T = I_p = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)$ $W_T = W_p = \frac{\pi\,(D^4 - d^4)}{16\,D} = \frac{\pi\,(R^4 - r^4)}{2\,R}$
Dünnwandiger Kreisring 	$I_T = I_p = \frac{\pi}{4}\,d_m^3\,t$ $W_T = W_p = \frac{\pi}{2}\,d_m^2\,t$ * Die Schubspannung ist überall gleich groß. Sie wirkt sie sowohl über die ganze Wanddicke als auch über den gesamten Umfang.
Halbkreis 	$I_T = 0{,}296\,r^4$ $W_T = 0{,}348\,r^3$
Ellipse 	$I_T = \pi\frac{a^3\,b^3}{a^2 + b^2}$ $W_T = \frac{\pi}{2}a\,b^2$ Die maximale Schubspannung liegt stets an den Randfasern der kurzen Halbachsen vor.
Gleichseitiges Dreieck 	$I_T = \frac{a^4}{46{,}19} = \frac{h^4}{26}$ $W_T = \frac{a^3}{20} = \frac{h^3}{13}$

Torsionswiderstandsmomente und -flächenträgheitsmomente

Ausgewählte Querschnitte (Fortsetzung)

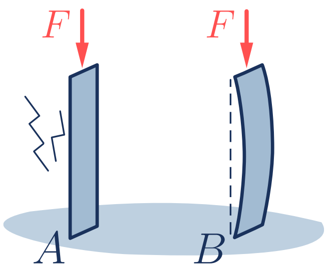
Quadrat 	$I_T = 0{,}141\,a^4$ $W_T = 0{,}208\,a^3$
Sechseck, Sechskant, Hexagon 	$I_T = 0{,}115\,s^4 = 0{,}065\,e^4$ $W_T = 0{,}188\,s^3 = 0{,}122\,e^3$ $s = \frac{\sqrt{3}}{2}\,e$
Achteck, Achtkant, Oktagon 	$I_T = 0{,}108\,a^4 = 0{,}079\,b^4$ $W_T = 0{,}185\,a^3 = 0{,}146\,b^3$ $b = \sqrt{\frac{4+2\cdot\sqrt{2}}{3+2\cdot\sqrt{2}}}\,a = 1{,}082\,a$

Notizen

Knickung

Druckbeanspruchte Stäbe können bei Erreichen einer bestimmten kritischen Last nachgeben und ohne Vorwarnung schlagartig durchbiegen (knicken).

Im Augenblick des Knickens geht der Stab von der instabilen, nicht-durchgebogenen Gleichgewichtslage A in eine stabile, durchgebogene Gleichgewichtslage B über.

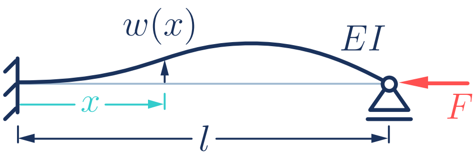


Knickgleichung

Mit der Knickgleichung lässt sich sowohl die Auslenkung eines geknickten Stabes als auch die kritische Kraft bestimmen, die zum Knickversagen führt:

$$w^{IV} + \lambda^2 w'' = 0 \qquad \text{mit:} \quad \lambda^2 = \frac{F}{EI}$$

1) Gilt nur für eine konstante Biegesteifigkeit $EI = const.$
2) Die Durchbiegung bzw. die Knickung erfolgt stets um die Achse mit dem schwächsten Flächenträgheitsmoment.



Allgemeine Lösung der Knickgleichung:

$$w(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) + C\lambda x + D$$

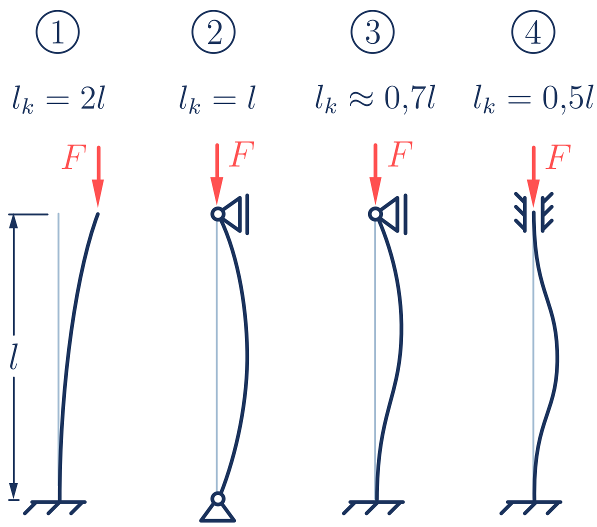
1) Die Koeffizienten A bis D müssen aus Randbedingungen des konkret vorliegenden Systems ermittelt werden (wie bei der Biegelinien-DGL).
2) Für die praktische Anwendung ist ausschließlich der kleinste Eigenwert λ_1 relevant, der nicht Null ist.
3) $w(x)$ wird auch Eigenform oder Knickform genannt.

Euler-Knickfälle

Für die folgenden vier Lagerungen kann die Knicklast mithilfe der zugehörigen Knicklänge l_k bestimmt werden:

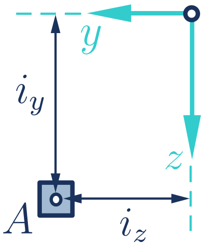
$$F_k = \frac{EI_{min}\,\pi^2}{l_k^2}$$

Der Balken versagt/knickt stets bezogen auf die schwächste Achse, also die Querschnittsachse mit dem kleinsten FTM.



Trägheitsradius

Nimmt man an, dass die Fläche A in einem Punkt konzentriert wirkt und den Abstand i (Trägheitsradius) zur Biegeachse hat, dann erhält man das FTM I (Steiner-Anteil). Der TR hat die Dimension der Länge.



$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$

Der TR kann ein Maß dafür sein, wie „gut" ein Querschnitt in Hinblick auf sein FTM ausgenutzt wurde. Ein Kreis und ein Hohlkreis mit ähnlichen Maßen haben ein ähnliches FTM. Beim Hohlkreis ist der TR aber größer, weil er trotz kleinerer Fläche auf ein vergleichbares FTM kommt (bessere Materialausnutzung).

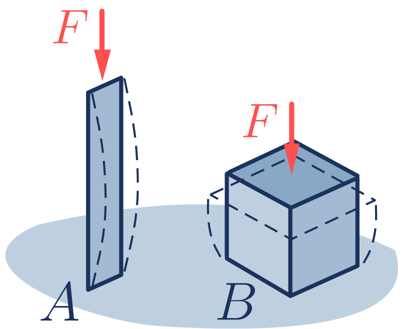
Schlankheitsgrad

Der Schlankheitsgrad (dimensionslos) sagt aus, wie „schlank" ein Balken ist. Dabei ist stets der Trägheitsradius der schwächeren Achse (kleinstes FTM) relevant.

$$\lambda = \frac{l}{i}$$

Für die Euler-Fälle ist die jeweilige Knicklänge einzusetzen: $l = l_k$

Grenzschlankheitsgrad



Nur dünne Stäbe mit großer Schlankheit können elastisch „sauber" knicken (A). Bei dicken Körpern mit kleiner Schlankheit kommt es zur reinen Quetschung (B). Damit es zum rein elastischen Knicken kommt, muss die Schlankheit des Stabes über der Grenzschlankheit liegen:

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{R_p}}$$

1) Stäbe, deren Schlankheit nur knapp unter λ_0 liegt, knicken plastisch (Tetmajer).
2) Deutlich unter λ_0 kommt es erst gar nicht zum Knicken (B).
3) Proportionalitätsgrenze: $R_p = 0{,}8\, R_e$

Knickspannung

Spannung im Querschnitt, die beim Knicken vorliegt bzw. zum Knicken erforderlich ist:

$$\sigma_k = \frac{F_k}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Diese Gleichung gilt nur im linear-elastischen Werkstoffbereich. Das ist dann der Fall, wenn eine der Bedingungen erfüllt ist:

$$\sigma_k < R_p \,, \quad \lambda > \lambda_0$$

Wird dies nicht erfüllt, dann liegt Knicken im plastischen Bereich vor. In diesem Fall wird die Knickspannung nach Tetmajer berechnet.

Notizen

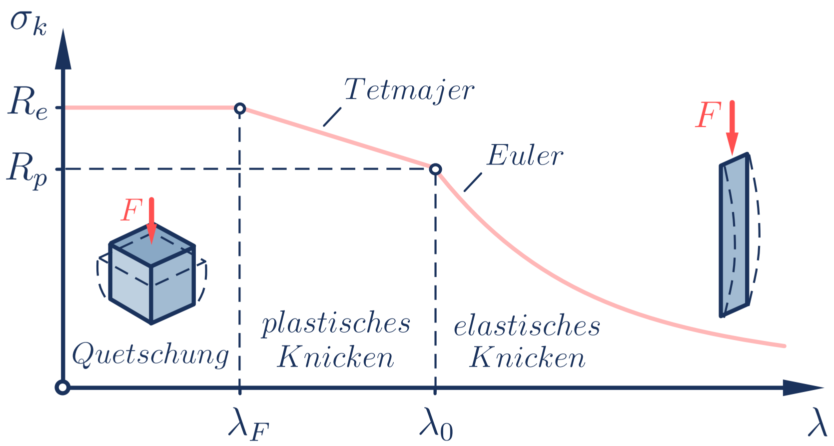
Knicksicherheit

$$S_k = \frac{F_k}{F_{vorh}} = \frac{\sigma_k}{\sigma_{vorh}}$$

Übliche Werte für die Sicherheit gegen Knicken liegen im Bereich 2 ... 10.

Knicken im plastischen Bereich (Tetmajer)

Stäbe, die nicht schlank genug für die elastische Knickung sind, knicken plastisch. Ihr Schlankheitsgrad ist dann kleiner als der Grenzschlankheitsgrad. In diesem Fall kann die Knickspannung nach Tetmajer berechnet werden.



Die Knickspannung nach Tetmajer ist linear abhängig vom Schlankheitsgrad:

$$\sigma_k = a - b \cdot \lambda$$

Die Faktoren a und b sind werkstoffabhängig und können für ausgewählte Werkstoffe der Tabelle entnommen werden.

Werkstoff	E in N/mm^2	λ_0	a	b
E295, E335	210.000	89	335	0,62
S235JR	210.000	104	310	1,14
5%-Ni-Stahl	210.000	86	470	2,30
Gusseisen	100.000	80	$\sigma_k = 776 - 12\lambda + 0,053\lambda^2$	
Nadelholz	10.000	100	29,3	0,194

Wichtige Werkstoffkennwerte

Kennwerte für Stahl

$$E = 210.000\,\frac{N}{mm^2}, \quad G \approx 80.000\,\frac{N}{mm^2}, \quad \nu \approx 0,3$$

Elastizitätsmodul, E-Modul

Der E-Modul E sagt aus, wie elastisch ein Werkstoff in Zug-Druck-Richtung ist. Ein großer E-Modul bedeutet, dass das Material steif ist und wenig nachgibt. Er wird im linearen Bereich des Spannungs-Dehnungs-Diagramms ermittelt.

Schubmodul, G-Modul

Der Schubmodul G sagt aus, wie elastisch ein Werkstoff bei Schubbeanspruchungen (Torsion oder Scherung) ist. Er wird entweder in einem Torsionsversuch direkt oder indirekt über die Querkontraktionszahl ermittelt:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Querkontraktionszahl, Poisson-Zahl

Die Querkontraktionszahl ν sagt aus, wie sehr der Querschnitt eines Körpers schrumpft, wenn er in Längsrichtung gezogen wird.

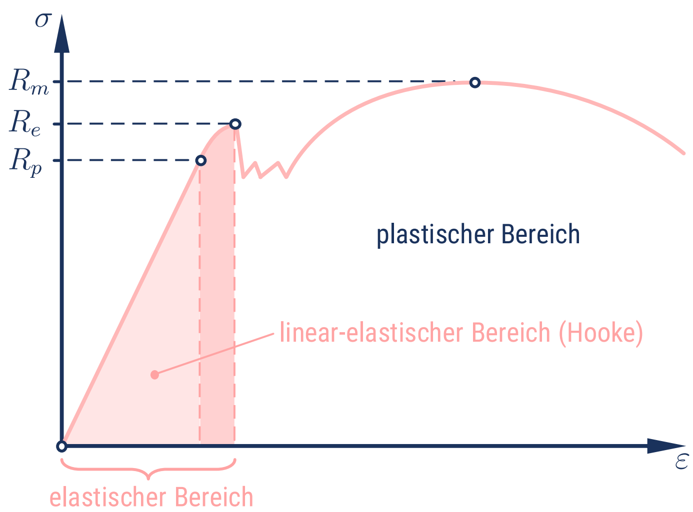
$$\nu = -\frac{\varepsilon_{quer}}{\varepsilon_{längs}}$$

Spannungs-Dehnungs-Diagramm

Streckgrenze R_e: Wichtige Festigkeitsgröße für duktile/zähe Metalle. Sie markiert den Übergang vom elastischen zum plastischen Materialverhalten.

Proportionalitätsgrenze R_p: Hier endet der linear-elastische Bereich, in dem das Hookesche Gesetz gilt. Richtwert für duktile Metalle: $R_p = 0{,}8\,R_e$

Zugfestigkeit R_m: Wichtige Kenngröße für spröde Metalle. Bei dieser Spannung kommt es zum Bruch.



Notizen

Mathematische Grundlagen

Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck

Winkelbeziehungen

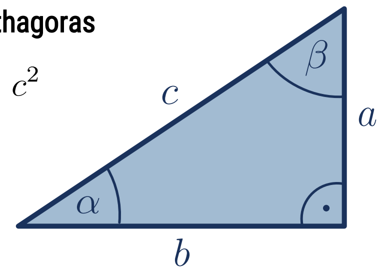
$$sin(\alpha) = \frac{a}{c}$$

$$cos(\alpha) = \frac{b}{c}$$

$$tan(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{a}{b}$$

Satz des Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Die beiden kurzen Seiten werden Katheten, die lange Seite wird Hypotenuse genannt.

vRechengesetze

Wurzeln

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Ausklammern und Ausmultiplizieren

$$a \cdot c + b \cdot c = c \cdot (a+b)$$

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} + \frac{a \cdot e}{b \cdot f}$$

Brüche

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a \cdot c}{b}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b \cdot c}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\frac{c}{a} + \frac{c}{b} \neq \frac{c}{a+b}$$

Ableitungen und Integrale

Faktoren	$(a\,x)' = a\,(x)'$	$\int a\,x\,dx = a \int x\,dx$
Summen	$(x^2 + x)' = (x^2)' + x'$	$\int x^2 + x\,dx = \int x^2\,dx + \int x\,dx$
Potenzen	$(x^n)' = n\,x^{n-1}$	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
Konstanten	$a' = 0$	$\int a\,dx = a\,x + C$